

Заочна математична олімпіада 2курс

1. Розв'яжіть рівняння:

а) (3 бали) $x^{\log_4 x - 2} = 2^{3(\log_4 x - 1)}$;

б) (3 бали) $7^x \cdot (\sqrt{2})^{2x^2 - 6} - \left(\frac{7}{4}\right)^x = 0$;

в) (3 бали) $x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 40$;

г) (4 бали) $\left(\frac{37}{21}x\right)^3 = p$, де p -середнє арифметичне чисел

$$A = \frac{158^2 + 158 \cdot 185 + 185^2}{185 + 158} \quad \text{і} \quad B = \frac{158^2 - 158 \cdot 185 + 185^2}{185 - 158}.$$

2. Розв'яжіть алгебраїчним і графічним способом:

(4 бали) $|x^2 - 2x| < 4$.

3. Спростіть вираз:

а) (3 бали) $\frac{\operatorname{tg} 3\alpha \cdot (1 - \operatorname{ctg}^2 3\alpha)}{\operatorname{tg}^2 3\alpha \cdot \operatorname{ctg} 3\alpha}$;

б) (3 бали) $\left(\frac{\frac{1}{2^4 \cdot 5^5} + \frac{1}{2^5 \cdot 5^4}}{\frac{1}{2^{20} + 5^{20}}}\right)^{10} + \left(\frac{\frac{1}{2^4 \cdot 5^5} - \frac{1}{2^5 \cdot 5^4}}{\frac{1}{2^{20} - 5^{20}}}\right)^{10} + 1810$.

4. (3 бали) Доведіть, що $\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{2}{3}$.

5. (3 бали) Розв'яжіть нерівність: $\log_{\sqrt{2}}(5^x - 1) \log_{\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{2}}{5^x - 1} > 2$.

6. (3 бали) Знайдіть суму X та Y , які задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3^{1 - 2\log_3(y-x)} = 48 \\ 2\log_5(2y - x - 12) - \log_5(y - x) = \log_5(x + y) \end{cases}$$

7. Знайдіть і обчисліть похідні:

а) (3 бали) $f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x$, $x_0 = \frac{\pi}{12}$;

б) (4 бали) $y = 5(x + 2)^2 \cdot \sqrt[5]{x - 1}$, $x_0 = \frac{7}{6}$;

в) (4 бали) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x}$; $x_0 = 1$;

8. Запишіть рівняння і побудуйте дотичну до графіка функції:

а) (6 балів) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5$, $x_0 = 3$;

9. (3 бали) Доведіть, що з усіх рівнобедрених трикутників, вписаних в даний круг, найбільший периметр має рівносторонній.

10. (3 бали) Знайдіть найбільшу площу прямокутника, вершини якого лежать в початку координат, на осі OX , на осі OY та на параболі $y = 4 - x^2$.

11. (3 бали) Побудуйте графік функції:

$$f(x) = 2^{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x}.$$

12. Дослідіть функцію і побудуйте графік:

а) (4 бали) $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$; б) (5 балів) $f(x) = \frac{(x+1)(2-x)}{2x+3}$;